Teoria del Meta

Luca Blanchi

Dicembre 2021

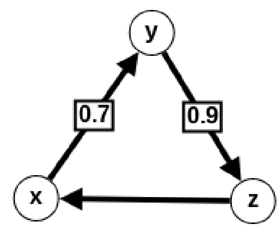
Contents

1 Introduzione

1.1 Motivazione

Pensiamo alla seguente situazione: molti giocatori giocano ad un gioco, per il quale esistono diverse strategie, ed è determinata la probabilità che una data strategia prevalga su un'altra (non sono possibili pareggi). I giocatori si sfidano randomicamente a coppie, e un giocatore sconfitto comincerà ad utilizzare la strategia contro cui ha perso. Il nostro obiettivo è modellizzare questo problema, e investigare questioni riguardo l'evoluzione del numero di giocatori che adottano ciascuna strategia.

Un gioco può essere rappresentato da un grafo orientato pesato del tipo:



dove i vertici rappresentano le strategie, e sugli archi orientati indichiamo la probabilità che la strategia entrante vinca su quella uscente. Per ogni coppia di vertici indichiamo solo il lato uscente dalla strategia vincente, non indichiamo la probabilità qualora questa sia 1, e non mettiamo alcun arco qualora la probabilità sia 0.5. La probabilità che una strategia ha di vincere su sé stessa dovrebbe essere 0.5, in quanto per ogni coppia di sfidanti che usano la medesima strategia si ha un vincitore e un perdente, per cui non indichiamo lati che entrano ed escono dallo stesso vertice. Utilizziamo le lettere $x, y, z...$ indicanti il nome di una strategia, anche per indicare la proporzione di giocatori che la utilizzano.

Un'idea sensata per creare un modello discreto è far evolvere il sistema scegliendo casualmente una coppia di giocatori che si sfidano. Per arrivare agilmente ad ottenere un modello continuo, adottiamo invece un modello discreto in cui tutti i giocatori vengono accoppiati come sfidanti contemporaneamente.

Consideriamo il gioco di esempio riportato sopra, con strategie x, y, z. Assumendo un grande numero N pari di giocatori, è ragionevole (?) pensare che, accoppiandoli randomicamente come sfidanti, la probabilità che in una sfida le strategie adoperate siano s_i ed s_j diverse sia approssimata bene da $2s_is_j$.
Consideriamo le sfide che coinvolgono la coppia di strategie xy: queste saranno in numero $2xyN$, di cui $0.7 \cdot 2xyN$ vinte dal giocatore di x, e $0.3 \cdot 2xyN$ dal giocatore di y. Quindi si avrà un aumento di $(0.7 - 0.3) \cdot 2xyN$ giocatori di x,

cioè un aumento relativo di $(0.7-0.3)2xy$.
Similmente, per la coppia xz, si avrà una perdita relativa di $(0-1)2xy$ giocatori di x. Le sfide del tipo xx non modificano i giocatori di x.

In generale, in un gioco con insieme delle strategie S, risulta che i giocatori di $x \in S$ subiranno un cambiamento relativo di $2\sum_{s\in S}(2p_{xs}-1)s \cdot x$, con p_{xs} probabilità che x vinca su s.

Notiamo che il numero $(2p-1)$ è pari ad 1 per $p=1$, a 0 per $p=0.5$, a -1 per $p=0$.

1.2 Passaggio al continuo

Consideriamo un gioco con insieme delle strategie S. Vogliamo ora pensare al cambiamento del numero di giocatori che adottano ciascuna strategia come un problema continuo, in cui il cambiamento relativo $2\sum_{s\in S}(2p_{xs}-1)s \cdot x$ indica la derivata di x, e $\sum_{s\in S} s = 1$. D'ora in poi ignoriamo il fattore 2 davanti alla prima sommatoria (la soluzione avrà le stesse orbite, percorse a velocità dimezzata).

Sia p_{ij} la probabilità che s_i vinca su s_j, sia $\mathbf{s} = (s_n)$ il vettore dei giocatori che adottano ciascuna strategia. Si considera matrice $A = (a_{ij})$, con $a_{ij} = 2p_{ij} - 1$. Notiamo che A è una matrice antisimmetrica, con entrate reali comprese tra -1 e 1. Vale allora che $(A\mathbf{s})_i = \sum_j (2p_{ij}-1)s_j$. L'evoluzione dei giocatori segue quindi il sistema differenziale: $\mathbf{s}' = (A\mathbf{s}) \odot \mathbf{s}$, dove $\odot$ indica il prodotto componente per componente.

Siamo quindi interessati a studiare sistemi differenziali del tipo $\mathbf{s}' = (A\mathbf{s}) \odot \mathbf{s}$, con A matrice antisimmetrica con entrate reali comprese tra -1 e 1, e condizioni iniziali $s_i \geq 0$, $\sum s_i = 1$.

Questo tipo di sistema è un caso particolare dei sistemi di Lotka-Volterra generalizzati.

1.3 Formalizzazione

Definizione 1.3.1. Un *gioco* è un grafo finito pesato orientato, in cui ogni coppia di vertici è unita da esattamente due archi di orientazione diversa, con pesi p e $1-p$, dove $p \in [0,1]$, e $p = 0.5$ se i vertici coincidono. I vertici del grafo sono anche chiamati *strategie*, e il peso dell'arco uscente dal vertice i ed entrante in j è detto *probabilità di vittoria* di i su j, ed è indicato con p_{ij}.

Nota 1.3.1. Solitamente, disegneremo un gioco ignorando gli archi con peso $p \leq 0.5$. Chiameremo anche *frecce* gli archi orientati, e potremo dire *invertire una freccia* per indicare l'operazione di scambiare i pesi nella coppia di archi che unisce due strategie.

Definizione 1.3.2. Dato un gioco X con insieme delle strategie S ordinato, chiamiamo *matrice associata a* X la matrice $A_X = (a_{ij})$, $a_{ij} = 2p_{ij} - 1$, $i, j \in S$.

Osservazione 1.3.1. La matrice associata ad un gioco è antisimmetrica.

Proof. $a_{ij} = 2p_{ij} - 1 = 2(1 - p_{ji}) - 1 = 2 - 2p_{ji} - 1 = -(2p_{ji} - 1) = -a_{ji}$. □

Osservazione 1.3.2. La matrice associata ad un gioco ha entrate comprese tra -1 e 1.

Osservazione 1.3.3. Sostituendo con degli 1 le entrate non nulle della matrice associata ad un gioco, si ottiene la matrice di adiacenza del gioco qualora fossero eliminate le frecce con peso 0.5.

Definizione 1.3.3. Dato un gioco X con insieme delle strategie S ordinato, e un vettore di funzioni incognite $\mathbf{s} = (s_i(t))$, $i \in S$, chiamiamo *sistema associato* a X il sistema di equazioni differenziali $\mathbf{s}' = (A_X s) \odot \mathbf{s}$, dove il simbolo $\odot$ indica il prodotto componente per componente. Delle condizioni iniziali per il sistema sono dette *standard* se sono del tipo $s_i(0) = \alpha_i$, $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $\sum_{i \in S} \alpha_i = 1$. La funzione $x_i(t)$ che risolve il sistema date condizioni iniziali standard indica i *giocatori della strategia i al momento t.*

2 Caratteristiche generali

2.1 Esistenza globale e unicità della soluzione

Osserviamo che il sistema associato ad un gioco è autonomo, per cui per soddisfare le ipotesi del teorema di Picard-Lindelöf e dimostrare l'esistenza e l'unicità locale della soluzione è sufficiente verificare la locale Lipshitzianeità rispetto alle funzioni incognite.

Notiamo che le equazioni sono polinomi di secondo grado omogenei nelle funzioni incognite, dunque sono differenziabili e in particolare localmente Lipshitz.

Dimostreremo in seguito che la soluzione è sempre contenuta in un simplesso nello spazio delle configurazioni (prima per condizioni iniziali standard, poi in generale), da cui per il principio di fuga dai compatti segue l'esistenza globale della soluzione. In alternativa, utilizzando i risultati del prossimo paragrafo, è una semplice osservazione verificare che le derivate siano limitate.

2.2 Conservazione dei giocatori

Teorema 2.2.1. Dato un gioco X con strategie S, il numero di giocatori rimane costante nel tempo, cioè per il sistema associato vale che $\sum_{s \in S} s(t)$ è costante.

Proof. $\partial_t \sum s_i = \sum \partial s_i = \sum_{\text{righe}} (A\mathbf{s} \odot \mathbf{s})_i = \mathbf{s}^T A \mathbf{s} = 0$, dove l'ultima eguaglianza segue perché A è antisimmetrica. □

Questo è in accordo con la nostra intuizione, in quanto si sta modellizzando il cambiamento di strategia da parte di un fissato numero di giocatori.

Dimostreremo nel successivo paragrafo che se si inizia con un numero positivo di giocatori per ogni strategia, nessuna raggiungerà mai un numero negativo di giocatori.

Da questo, ricordando che l'$n-$simplesso standard è definito come la combinazione convessa dei vettori della base canonica in $\mathbb{R}^n$, e rappresenta la regione di coordinate positive che sommano ad 1, si ottiene il risultato:

Osservazione 2.2.1. Lo stato di un sistema associato ad un gioco con n strategie nello spazio delle configurazioni rimane all'interno dell'$n-$simplesso standard.

Osservazione 2.2.2. Le coordinate nello spazio delle fasi si possono interpretare come coordinate baricentriche, in maniera che il moto nel simplesso standard si possa vedere all'interno di un simplesso descritto dal gioco.

Riscalando delle condizioni iniziali rendendole a somma diversa da 1, per via dell'omogeneità delle equazioni, anche le derivate vengono riscalate. Per cui si presentano orbite analoghe, percorse a velocità diversa su un simplesso più grande sul quale vengono proiettate(?).

2.3 Sottogiochi ai bordi

Definizione 2.3.1. Dato un gioco X, un *sottogioco* è un gioco ottenuto eliminando da X alcune strategie, e le frecce entranti e uscenti da esse.

Supponiamo di avere delle condizioni iniziali in cui ci sono strategie non adottate da alcun giocatore. L'intuizione ci direbbe che alcun giocatore si convertirebbe mai a tali strategie, in quanto nessuno può perdervi contro, né queste possono cedere giocatori ad altre, quindi la presenza di strategie non adottate è del tutto indifferente per lo spostamento dei giocatori, e dunque si può passare al sottogioco in cui esse sono totalmente assenti.

Nel nostro formalismo, quest'idea corrisponde al seguente risultato:

Teorema 2.3.1. Dato un sistema associato a un gioco con condizioni iniziali standard, se $s_i = 0$, allora $s(t) = 0$ per ogni t. Inoltre, le altre strategie si evolvono come nel sottogioco in cui la strategia s_i è assente.

Proof. Se $s_i = 0$, a causa del prodotto componente per componente $\odot\mathbf{s}$, anche $\partial_t s_i = 0$, dunque $s(t) = 0$ per ogni t. Come conseguenza, l'$i-$esimo addendo di ogni componente di $P\mathbf{s}$ (che rappresenta il contributo di s_i a $\mathbf{s}'$) sarà nullo per ogni t. Ignorando la riga e gli addendi nulli, si ottiene il sistema associato al sottogioco con s_i rimossa. $\square$

Osservazione 2.3.1. Se molteplici condizioni iniziali sono nulle, si passa al sottogioco dove tutte le corrispettive strategie sono state rimosse.

Osservazione 2.3.2. La porzione del simplesso standard dove alcune coordinate si impongono nulle, è il sottosimplesso dato dalla combinazione convessa dei vettori canonici relativi alle coordinate non annullate. Per cui il sistema associato ad un sottogioco descrive il moto nel relativo sottosimplesso generato dalle strategie non nulle.

Osservazione 2.3.3. L'evoluzione del sistema è legata unicamente a come si evolve sui lati $1-$dimensionali del simplesso standard, in quanto a ciascuno di essi corrisponde il peso degli archi in una coppia di strategie, e conoscendo i pesi per ogni coppia si ricostruisce tutto il gioco (dimostreremo in seguito che pesi diversi tra due strategie danno luogo ad un comportamento diverso sul rispettivo lato).

Osservazione 2.3.4. Il sistema di un gioco con una sola strategia ha soluzioni costanti. Per cui, i sottogiochi con una sola strategia individuano punti stazionari del sistema associato a un gioco, cioè gli assi nello spazio delle configurazioni. Con condizioni iniziali standard, questo ci dice che i vertici del simplesso standard sono punti stazionari del sistema.

Dimostriamo finalmente il seguente:

Teorema 2.3.2. Il numero di giocatori per strategia in un sistema associato a un gioco con condizioni iniziali standard rimane positivo per ogni $t > 0$.

Proof. Una componente positiva della soluzione, per diventare negativa, deve essere nulla per qualche t. Se diventasse nulla, il sistema inizierebbe a comportarsi come un sottogioco, in cui varia solo il numero di giocatori delle altre strategie: infatti, si avrebbe $s_i' = 0$, quindi s_i rimarrebbe 0. Si itera il ragionamento scendendo sempre a sottocomplessi di dimensione inferiore, cioè annullando sempre più componenti della soluzione, finché non sono tutte nulle tranne una: ma in questo caso caso ci troveremmo in un vertice, che è un punto stazionario. □

Possiamo in realtà migliorare il risultato, dimostrando che partendo dalla parte interna di un simplesso, non si raggiungono mai i bordi. Verifichiamo il seguente:

Lemma 2.3.1. Invertendo il tempo in una soluzione del sistema associato a un gioco X, si ottiene una soluzione del sistema associato al gioco ottenuto invertendo tutte le frecce di X.

Proof. Invertire il tempo è equivalente a cambiare segno alle derivate, che è equivalente a cambiare segno alla matrice antisimmetrica associata (o equivalentemente a trasporla), dunque è equivalente a invertire le frecce del gioco. □

Da questo segue che, dato un sistema con condizioni iniziali standard, ogni sottosimplesso è invariante sia in avanti che indietro nel tempo. Come conseguenza, il moto nello spazio delle configurazioni con condizioni iniziali standard non raggiunge mai i bordi del sottosimplesso standard in cui parte.

2.4 Punti stazionari non banali

Siamo interessati a trovare punti stazionari con coordinate positive con somma 1, in quanto sono possibili condizioni iniziali standard del sistema. Ci chiediamo in generale chi siano i punti stazionari del sistema $\mathbf{s}' = P\mathbf{s} \odot \mathbf{s}$.

Definizione 2.4.1. Chiamiamo *banali* i punti stazionari del sistema associato a un gioco che hanno almeno una coordinata nulla.

Consideriamo $\mathbf{s}$ configurazione con tutte le entrate non nulle (cioè, $\mathbf{s}$ si trova nella parte interna del simplesso standard). $\mathbf{s}$ sarà un punto stazionario del sistema, solo se lo è per il sistema lineare $\mathbf{s}' = P\mathbf{s}$: infatti, il prodotto componente per componente per numeri non nulli non può azzerare alcuna entrata non nulla altrimenti. Quindi, un elemento con entrate positive del nucleo della matrice associata ad un gioco corrisponde a un punto stazionario non banale.

Considerando invece $\mathbf{s}$ con almeno una entrata nulla, il problema si riduce a cercare i punti stazionari del rispettivo sottogioco.

2.5 Giochi speculari

Potremmo chiederci come si comporta un sistema con condizioni iniziali non tutte positive. Ci viene in aiuto la seguente:

Osservazione 2.5.1. Cambiare segno al numero di giocatori che adottano una strategia (ammettendo quindi valori negativi), è equivalente a cambiare segno alle entrate nella rispettiva riga e colonna della matrice antisimmetrica del sistema, il che è equivalente a invertire tutte le frecce entranti e uscenti da tale strategia mantenendo positivo il numero di giocatori che la adottano.

Come conseguenza, l'evoluzione del sistema con condizioni iniziali non tutte positive è analoga all'evoluzione del sistema associato ad un altro gioco ottenuto invertendo le opportune frecce, con condizioni iniziali non negative.

L'osservazione suggerisce un'azione da $(\mathbb{Z}/_2)^n$ all'insieme dei giochi con n strategie ordinate, dove l'$i-$esimo generatore canonico inverte tutte le frecce uscenti o entranti dalla $i-$esima strategia.

Definizione 2.5.1. Chiamiamo *speculari* i giochi facenti parte di una stessa orbita di questa azione.

Un'orbita di questa azione contiene al più $2n - 1$ giochi differenti, in quanto risulta che due elementi che differiscono di $(1, 1, ..., 1)$ agiscono nello stesso modo.

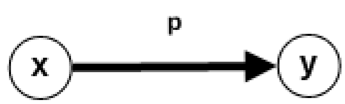
Per questo, trovare un elemento del nucleo di una matrice antisimmetrica con entrate non nulle, significa trovare un punto stazionario non banale in un gioco speculare a quello a cui è associata la matrice.

Come conseguenza delle osservazioni fatte, si ha che il comportamento di un sistema globale è determinato dal suo comportamento, e dal comportamento di sistemi di giochi speculari, in condizioni standard.

3 Giochi piccoli

3.1 Conversione

Il gioco non banale più semplice è composto da due strategie, in cui una vince sull'altra con probabilità $0.5 < p < 1$:



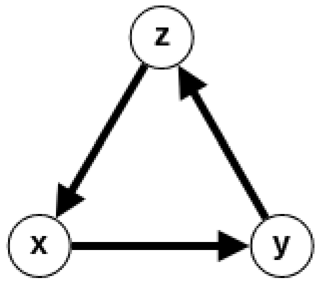
A tale gioco, chiamando $\alpha = 2p - 1 > 0$, è associato il sistema $\begin{cases} x' &= \alpha xy \\ y' &= -\alpha xy \end{cases}$. Utilizzando $y = (1 - x)$, si ottiene $x'(t) = \alpha x(1 - x)$, la cui soluzione è una curva logistica: $x(t) = \frac{1}{1+(\frac{1}{x_0}-1)e^{-at}}$. Il caso $x(0) = 0$ è da fare a parte, si ottiene $x(t) = 0$. y si trova come $1 - x$.

La crescita di x soddisfa l'intuizione derivante dall'interpretazione probabilistica: è lenta per x piccolo, poiché ciò significa che pochi giocatori di y vengono sfidati e convertiti, è massima quando si hanno tanti giocatori di x quanti di y, per cui è massima la probabilità di un incontro tra le due strategie, e diventa nuovamente piccola quando i giocatori di y iniziano a scarseggiare.

Gli unici punti stazionari sono quindi i vertici del simplesso standard, corrispondenti a sottogiochi con una sola strategia. Uno è stabile asintoticamente, l'altro è instabile.

3.2 Morra cinese

La morra cinese è il gioco con tre strategie che si battono ciclicamente:

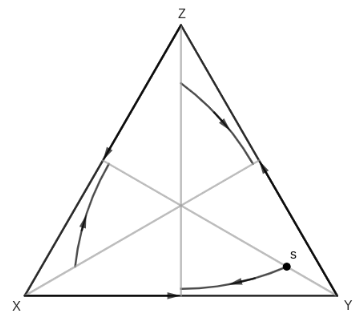


A tale gioco è associato il sistema differenziale:

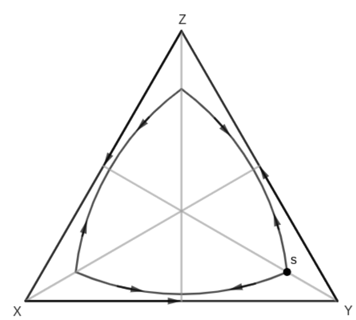
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Questo ammette un punto stazionario interno al simplesso standard, ossia $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, che appartiene al nucleo della matrice antisimmetrica. Questo corrisponde alla configurazione in cui ogni strategia ha lo stesso numero di giocatori, dalla simmetria delle frecce è intuitivo che non ci si possa muovere in alcuna direzione particolare. I sottosimplessi corrispondono a conversioni, i cui punti stazionari sono i vertici del simplesso standard, i quali sono instabili per il sistema complessivo.

Vediamo adesso come si possono sfruttare alcune simmetrie per dimostrare che le orbite interne al simplesso standard sono chiuse. Utilizziamo che il comportamento del sistema si comporta bene (?) rispetto a permutazioni cicliche delle strategie, e che sotto inversione temporale si ha ancora una morra cinese, con le relazioni di vittoria invertite. Mettiamoci in condizioni standard con $y > x = z$ e $y \neq 1$, da cui $x' > 0$, $y' < 0$, $z' < 0$. Lo stato del sistema si evolve fino ad avere $y = x$ in tempo finito, infatti vale $x' = x(y - z)$, ma x cresce, e $y - z$ non può scendere sotto l'iniziale valore di $x - z$ senza che si abbia $x = y$. La stessa traiettoria si ripete permutando ciclicamente le coordinate, cioè ruotando il simplesso di $\frac{1}{3}$ di giro.



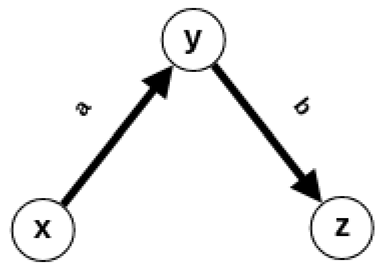
Ci chiediamo adesso cosa succede con le stesse condizioni di partenza ma tempo invertito: il sistema si comporta come se le frecce fossero invertite, cioè come in una morra cinese con x e z scambiati, per cui si presenta lo stesso comportamento e questo fa concludere che le orbite siano chiuse. Il punto stazionario al centro è quindi stabile, ma non asintoticamente.



Come variante alla morra cinese, si può associare alle frecce una probabilità di vittoria $0.5 < p_i < 1$, la matrice antisimmetrica associata al sistema è del tipo $\begin{bmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{bmatrix}$, con $a, b, c > 0$ nelle ipotesi date su p_i. Questi giochi ammettono come punto stazionario $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix}$, che è non banale.

Test numerici suggeriscono ancora orbite chiuse (?).

3.3 Catena di due conversioni



Una catena di due conversioni è il gioco rappresentato sopra. Scrivendo la y come $1 - x - z$, il sistema associato diventa $\begin{cases} x' &= a\,x(1-x-z) \\ z' &= -b\,z(1-x-z) \end{cases}$.
Possiamo trovare le traiettorie come $\frac{dz}{dx} = -\frac{b}{a}\frac{z}{x}$. Si ricava facilmente separando le variabili l'integrale primo $E = \frac{b}{a}\log x + \log z$ (assumiamo $x \neq 0$, $z \neq 0$), da cui segue che anche la funzione $x^{\frac{b}{a}} \cdot z$ rimane costante.
Questo suggerisce che è impossibile che tutti i giocatori tendano a spostarsi verso x, ma che si converga ad uno stato in cui $y = 0$ e $x^{\frac{b}{a}} \cdot z = 1$, che dipende dalle condizioni iniziali. (?)

4 Categoria dei Giochi

Vogliamo costruire un'opportuna categoria dei giochi, e investigare l'esistenza e le proprietà di prodotti e coprodotti. Al fine di trovare una opportuna definizione per i morfismi, è utile chiedersi quale dovrebbe essere un quoziente di un gioco.

4.1 Quozienti

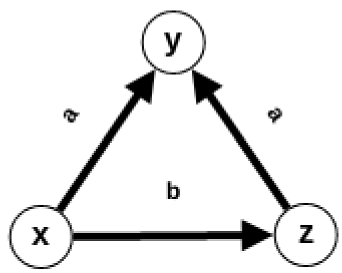
Immaginiamo di avere un gioco con strategie S, e di avere un sottoinsieme $V \subseteq S$ di strategie con la proprietà che, al variare delle strategie $v \in V$, p_{sv} rimane invariato per ogni $s \in S \setminus V$. Intuitivamente, questo significa che dal punto di vista dei giocatori di una strategia $s \in S \setminus V$, le strategie in V sono indistinguibili, e per l'evoluzione di S non conta come i giocatori siano distribuiti all'interno delle strategie in V, ma solo quanti siano complessivamente. Questo ci suggerisce la possibilità di semplificare il gioco per studiare più agilmente l'evoluzione delle strategie in $S \setminus V$ trattando l'insieme V come un'unica strategia. Chiamiamo questa operazione quoziente. Con l'idea generale che le giuste mappe tra oggetti sono quelle le cui immagini sono quozienti, diamo la seguente:

Definizione 4.1.1. Una mappa tra due giochi X e Y è una funzione tra i loro insiemi di strategie $f : S_X \to S_Y$ tale che, $\forall \{x_1, ...x_k\} = f^{-1}(y)$ con $y \in S_Y$, vale $p_{xx_1} = p_{xx_2} = ... = p_{xx_k} = p_{f(x)y}$ per ogni $x \in S_x \setminus f^{-1}\{y\}$. Se f è surgettiva, la chiamiamo mappa a quoziente e diciamo che Y è un quoziente di X.

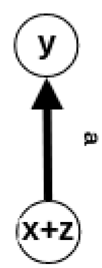
Dal punto di vista del sistema, chiamando $Q = \{x_1, ...x_k\}$ significa che in tutte le righe associate alla derivata di una strategia non in Q si può raccogliere il coefficiente comune alle $\{x_1, ...x_k\}$, ed eliminare le righe delle strategie in Q sostituendole con quella associata alla derivata di $x_1 + x_2 + ... + x_k$, ottenendo il sistema del gioco quoziente. (?)

Vediamo un esempio di applicazione dei quozienti:

Esempio 4.1.1. (Morra cinese truccata)



Chiamiamo morra cinese truccata il gioco rappresentato sopra. Il sistema associato è complicato a prima vista, ma possiamo semplificarlo andando a quozientare le strategie x ed y in un'unica strategia $x + y$:



Questa è semplicemente una conversione, che abbiamo già risolto. Quindi, sebbene sia difficile capire come si evolvano x, y e z, possiamo studiare semplicemente come si evolvono y, ed $x + z$.

Definizione 4.1.2. Chiamiamo $GAME$ la categoria le cui immagini sono giochi, e i morfismi mappe di giochi.

Osservazione 4.1.1. I giochi composti da una sola strategia sono isomorfi, e costituiscono l'oggetto finale della categoria. L'oggetto iniziale vorrebbe essere il gioco vuoto, ma è sensato chiedere che ci sia almeno una strategia.

4.2 Coprodotti

Risulta che i coprodotti esistono sempre, e sono banalmente le unioni disgiunte di giochi. Vediamo quindi come si comportano i giochi con componenti sconnesse.

Sia X un gioco sconnesso, enumeriamo le strategie in modo da mettere vicine le strategie di una componente connessa. La matrice associata al gioco, come la sua matrice di aderenza, è diagonale a blocchi, uno per ogni componente. Di conseguenza nel sistema associato le equazioni si spaiano, e si ottengono dei sistemi indipendenti tra loro, uno per componente.

Questo rappresenta il fatto che giocatori di strategie in diverse componenti connesse non si scambiano giocatori, e quindi si può pensare il problema separandolo per ciascuna componente connessa. La possibilità di pattare tra giocatori di strategie in componenti connesse diverse tuttavia rallenta l'evoluzione di giocatori all'interno di una componente, questo effetto è legato al fatto che i giocatori di una sottocomponente possono non sommare a 1, e abbiamo già osservato che questo si traduce nella percorrenza più lenta di orbite analoghe a quelle che si avrebbero se sommassero ad 1.

Osservazione 4.2.1. Una componente connessa si può sempre quozientare.

È evidente (?) che un punto è stazionario solo se lo è quando ristretto ad una data componente connessa, e che vale anche il viceversa, da cui segue (?) che i punti stazionari sono le combinazioni convesse dei punti stazionari di componenti sconnesse.

È semplice vedere che l'unione disgiunta di giochi verifica la proprietà universale del coprodotto. (?)

4.3 Prodotti

Per costruire il prodotto di giochi, cercheremo di invertire il quoziente. Mentre quozientando si collassano più strategie ad una sola, vogliamo un'operazione che sostituisce ad una strategia un intero gioco, ed aggiunga le frecce mancanti. Chiameremo tale operazione prodotto esplosione. Questa può non essere commutativa, ma nel caso lo fosse, coinciderà con il prodotto (?).

Definizione 4.3.1. Dati X, Y giochi, definiamo l'*esplosione* di X su Y, indicata con $X \ltimes Y$, il gioco ottenuto con il seguente procedimento: sia S l'insieme delle strategie di Y, si considera una copia di X per ogni strategia di Y, e si collega ciascuna strategia della copia i con un arco uscente di peso p_{ij} a ciascuna strategia della copia j, $\forall i, j \in S$.

Più formalmente, stiamo ottenendo un gioco le cui strategie sono le coppie (x, y), $x \in S_X$, $y \in S_Y$, con $p_{(x_1,y_0)(x_2,y_0)} = p_{x_1 x_2}$, e $p_{(x_1,y_1)(x_2,y_2)} = p_{(x_0,y_1)(x_0,y_2)} = p_{y_1 y_2}$.

Possiamo definire similmente (?) l'esplosione di X solo su un'insieme ristretto di strategie di Y, inclusa una sola. L'esplosione su una strategia sola inverte l'operazione di quoziente. (?).

Diciamo che l'esplosione di X su Y commuta se è isomorfa all'esplosione di Y su X.

Nota 4.3.1. Per convenienza, potremo rappresentare l'esplosione $X \ltimes Y$ disegnando una sola freccia tra le copie di X.

Osserviamo che quozientando per ciascuna copia di X si ottiene Y.

Un caso importante in cui l'esplosione è commutativa è quando i due giochi moltiplicati coincidono, cioè nel caso dei quadrati.

Un punto stazionario di $X \ltimes Y$ deve innanzitutto essere un punto stazionario dell'Y quoziente, e inoltre deve essere stazionario se ristretto ad ogni copia di X. In questo modo non si hanno flussi di giocatori né tra diverse copie di X, né all'interno delle copie, per cui la condizione è anche sufficiente. Per ottenere un punto stazionario non banale in una esplosione quindi, prima si distribuiscono i giocatori tra le copie di X in modo da non avere flussi tra esse e dando giocatori a ciascuna, e poi si distribuiscono questi all'interno di ciascuna copia in modo che costituiscano un punto stazionario non banale per essa.

Nei casi in cui l'esplosione $X \ltimes Y$ è commutativa, si avrebbero X e Y come quozienti, e verosimilmente l'esplosione è il prodotto (?).

5 Lista delle Cose da Fare

Investigare se i giochi con gli archi con peso 1 si comportano come quelli con gli stessi archi orientati ma probabilità più piccole, e cosa succede cambiando in modo continuo i pesi.

Investigare gli elementi del nucleo di matrici antisimmetriche con entrate diverse da 0, discutere della teoria spettrale e dello pfaffiano.

Investigare domande combinatoriche del tipo quante classi di giochi speculari esistono.

Cercare informazioni utili in letteratura sulle equazioni di Lotka-Volterra generalizzate.

Migliorare il capitolo sulla categoria delle categorie, cercare un legame con la teoria dell'omotopia.

Cercare quantità conservate o Lagrangiane e dimostrare la presenza di orbite chiuse in alcuni giochi.

Investigare il legame tra comportamento del sistema dei bordi di un simplesso e nel simplesso.

Linearizzare il sistema di alcuni giochi per studiare i punti stazionari

Investigare il legame tra le orbite di un sistema e del suo lineare associato.

Investigare la relazione con le catene di Markov.

Studiare ulteriori giochi piccoli, cercando ulteriori soluzioni analitiche, o introducendo una analisi numerica.

Dimostrare come le composizioni di frecce si legano alle derivate successive, e dare un'interpretazione probabilistica.

Vedere il caso continuo come limite probabilistico del caso discreto.

Trovare situazioni reali ben modellizzate dalla teoria.

Strutturare bene l'articolo, aggiungere i riferimenti.

Risolvere o spiegare meglio le questioni accompagnate da (?).